**Teoria przestrzeni Hilberta**
**Lista 5** (operatory zwarte)

**Definicja.** Operator $K \in L(H_1, H_2)$ nazywamy *operatorem zwartym* jeśli dla każdego ciągu $\{x_n\} \subset H_1$ takiego, że $\|x_n\| = 1$, ciąg $\{Kx_n\}$ posiada podciąg zbieżny w $H_2$.

**Zad 1.** Pokazać, że operator skończonego rzędu jest operatorem zwartym, natomiast operator identycznościowy na przestrzeni nieskończenie wymiarowej nie jest zwarty.

**Zad 2.** Wykazać, że

a) suma dwóch operatorów zwartych jest operatorem zwartym,

b) iloczyn dowolnego operatora z operatorem zwartym jest operatorem zwartym,

c) operator jest zwarty wtedy i tylko wtedy, gdy operator do niego sprzężony jest zwarty,

d) ciąg zbieżny operatorów zwartych jest zbieżny do operatora zwartego.

**Zad 3.** Czy w przestrzeni nieskończenie wymiarowej operator odwracalny może być operatorem zwartym?

**Zad 4.** Udowodnić, że operator $a \in L(\ell^2)$ mnożenia przez ciąg $\{a(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest zwarty wtedy i tylko wtedy, gdy ciąg $\{a(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny do zera.

**Zad 5.** Pokazać, że operator *Hilberta-Schmidta*, tj. taki operator, którego macierz $[a_{ij}]_{i,j=1}^{\infty}$ w pewnej bazie ortonormalnej spełnia warunek

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|^2 < \infty,$$

jest operatorem zwartym.

**Zad 6.** Pokazać, że operator całkowy $T : L_2[a, b] \to L_2[a, b]$ zdefiniowany wzorem

$$(Tx)(s) = \int_a^b K(s,t)x(t)dt$$

gdzie $K \in L_2([a, b] \times [a, b])$, jest operatorem zwartym.

*Wskazówka:* Pokazać, że $T$ jest operatorem Hilberta-Schmidta.

**Zad 7.** Pokazać, że operator $A : L_2[a, b] \to L_2[a, b]$ mnożenia przez funkcję $a(t) \in C([a, b])$:

$$(Ax)(t) = a(t)x(t)$$

jest operatorem zwartym wtedy i tylko wtedy, gdy $a(t_0) = 0$, dla pewnego $t_0 \in [a, b]$.

**Zad 8.** Załóżmy, że $AB$ jest operatorem zwartym, gdzie $A, B \in L(H)$. Czy stąd wynika, że:

a) oba operatory $A$ i $B$ są operatorami zwartymi,

b) co najmmniej jeden z operatorów $A$ lub $B$ jest operatorem zwartym.

**Zad 9.** Które z poniższych stwierdzeń dla operatorów zwartych w przestrzeni nieskończenie wymiarowej są prawdziwe?

a) Każdy operator zwarty jest operatorem Hilberta-Schmidta.

b) Istnieje operator zwarty z domkniętym obrazem.

c) Obraz każdego operatora zwartego jest domknięty.

d) Obraz każdego operatora zwartego nie jest domknięty.

e) Istnieje operator zwarty ze skończenie wymiarowym jądrem.

f) Jądro każdego operatora zwartego ma wymiar skończony.